Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
15 Settembre 2017: prima prova in itinere.

N. matr./anno iscr.		Cognome	
docente/ crediti		Nome	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello* in tutti fogli. Le risposte vanno *motivate*, e scritte su i fogli intestati.

ESERCIZIO 1 Sia γ la curva del piano $x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \qquad t \geq 0.$
(2p)**i-** La curva è semplice? È regolare? Si calcoli la lunghezza del suo sostegno.
(3p)**ii-** Nei punti di intersezione con gli assi si determini la pendenza della tangente. Tracciare approssimativamente il sostegno di γ giustificando che gira infinite volte attorno a $(0,0)$.
(1p)**iii-** Si calcoli il baricentro del sostegno. [Si assuma
$\int e^{-2t}\cos t dt = -\frac{2}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-2t}\sin t, \ \int e^{-2t}\sin t dt = -\frac{1}{5}e^{-2t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-2t}\sin t$].
(2p)**iv-** Si calcoli il lavoro di $F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ lungo la curva.
(4p)**v-** Si calcoli il raggio di curvatura nei vari istanti e in funzione della posizione.

ESERCIZIO 2 Per ogni $n \in \mathbf{N}^+$ sia $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
(2p)**i-** Si mostri che le f_n sono continue su $[0;+\infty)$. Si determini il limite puntuale $f(x)$.
(3p)**ii-** Si dimostri che $f_n \to f$ uniformemente in $[0,a]$ per ogni $a > 0$.
(1p)**iii-** Si calcoli, se esiste $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$.
(4p)**iv-** Si ha convergenza uniforme anche in $[0,\infty[$?

ESERCIZIO 3 (1p)**i-** Per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{|t|^a} =: L$? [Ricordare $\sin t = t + o(t^2),\ t \to 0$.]
(3p)**ii-** Per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a} =: L$.
(2p)**iii-** Per quali a la $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0) \\ L, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è differenziabile in $(0,0)$?
(3p)**iv-** La $F(x) =: \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^x \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}\,dy$ è continua in ogni $x \geq 0$?
(5p)**v-** È derivabile in $x = 0^+$? Nel caso si calcoli la derivata.
[Uno tra i diversi approcci è quello di cambiare variabile nell'integrale $z = \dfrac{y}{x}$.]

ESERCIZIO 4 (2p) **i-** Sia $f(x,y) = \cos(x+y) - \tan(x+y)\sin xy$. Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$.
(2p)**ii-** Si mostri che $Z = \{(x,y,x) \in \mathbf{R}^3 : \ e^{x^2y} + yz - x^3 = 0\}$, in un intorno del punto $P = (1,0,1)$, è il grafico di una $y = g(x,z)$. Si calcoli l'equazione del piano tangente in P.
(3p)**iii-** Sia $F(u,v) = (u^2 - v, uv, u^2 + v)$. Si determini l'equazione del piano tangente in $F(1,1)$ all'immagine di F ristretta ad un intorno di $F(1,1) = (0,1,2)$.
(3p)**iv-** Sia $\Phi(x,y) = (e^x + y, xy) =: (u,v)$. Si mostri che è localmente invertibile in $(0,1)$ e si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(2,0)$.

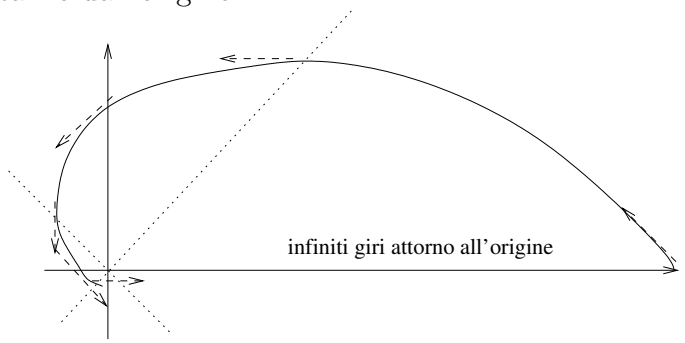
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Sia γ la curva del piano di equazioni parametriche

$$x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \qquad t \geq 0.$$

i- La curva è semplice? È regolare? Si calcoli la lunghezza del suo sostegno.
ii- Nei punti di intersezione con gli assi si determini la pendenza della tangente. Si tracci approssimativamente il sostegno di γ giustificando che gira infinite volte attorno a $(0,0)$.
iii- Si calcoli il baricentro del sostegno. [Si assuma
$\int e^{-2t}\cos t dt = -\frac{2}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-2t}\sin t$, $\int e^{-2t}\sin t dt = -\frac{1}{5}e^{-2t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-2t}\sin t$].
iv- Si calcoli il lavoro di $F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ lungo la curva.
v- Si calcoli il raggio di curvatura nei vari istanti e in funzione della posizione.

Soluzione: **i-** - - poichè $|\gamma(t)|^2_{\mathbf{R}^2} = x^2(t) + y^2(t) = e^{-2t}$ è iniettiva anche $\gamma(t)$ è iniettiva;
- - poichè $\gamma'(t) = -e^{-t}(\cos t, \sin t) + e^{-t}(-\sin t, cost) = e^{-t}(-\cos t - \sin t, -\sin t + \cos t) = (-x-y, x-y)$ si ha $|\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^2} = \sqrt{2}e^{-t} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} > 0$: γ è regolare.
- - La lunghezza per $t \geq 0$ è $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dt \;=\; \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \;=\; \sqrt{2}.$
ii- - - Si ha $\gamma' = (-x, x)$ per $y = 0$, $\gamma' = (-y, -y)$ per $x = 0$: le pendenze sono -1 ed 1.
- - La prima componente della velocità $x' = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ cambia segno da positivo a negativo sulla bisettrice del quarto quadrante, e da negativo a positivo su quella del secondo.
La seconda $y' = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t)$ cambia segno da positivo a negativo sulla bisettrice del primo quadrante, e da negativo a positivo su quella del terzo.
Poichè, per esempio, $y(t) = e^{-t}\sin t = 0$ ha infinite soluzioni a cui corrispondono diverse distanze dall'origine



iii- Essendo γ semplice le coordinate del baricentro del sostegno sono $\left(\frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma x\,ds, \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma y\,ds\right) =$
$= \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos t\,dt, \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin t\,dt\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$
iv- Conviene il calcolo diretto: $\displaystyle\int_\gamma F \;=\; \int_0^{+\infty} \langle F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\rangle_{\mathbf{R}^2}\,dt =$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}(-x-y) + \frac{x+y}{x^2+z^2}(x-y)\right) dt = 0.$

v- Poichè $\gamma''(t) = (-x'-y', x'-y') = (2y, -2x) = 2e^{-t}(\sin t, -\cos t)$, la cuvatura al quadrato è $\frac{1}{|\gamma'|^4}\left(|\gamma''|^2 - \left\langle \frac{\gamma'}{|\gamma'|}\cdot\gamma''\right\rangle^2\right) = \frac{1}{4(x^2+y^2)^2}\left(4(x^2+y^2) - \frac{4}{2(x^2+y^2)}(-xy-y^2-x^2+yx)^2\right) = \frac{1}{4(x^2+y^2)^2}2(x^2+y^2) = \frac{1}{2(x^2+y^2)} = \frac{e^{2t}}{2}$.
Quindi il raggio di curvatura è $\sqrt{2}e^{-t} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

ESERCIZIO 2 Per ogni $n \in \mathbf{N}^+$ sia $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
i- Si mostri che le f_n sono continue su $[0;+\infty)$. Si determini il limite puntuale $f(x)$ della successione $\{f_n\}$.
ii- Si dimostri che $f_n \to f$ uniformemente in $[0,a]$ per ogni $a > 0$.
iii- Si calcoli, se esiste $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$.
iv- Si ha convergenza uniforme anche in $[0,\infty[$?

Soluzione: **i-** - - Poichè $n > 0$ si ha per $x \to 0^+$ che l'esponenziale nel denominatore tende a 0. Quindi $f_n(x) \to 1 = f_n(0),\ x \to 0^+$.
- - Poiché anche $x \geq 0$ gli argomenti degli esponenziali sono negativi, e tendono a 0 (al numeratore) ed a $-\infty$ (al denominatore), per $n \to \infty$. Risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
ii- Si ha $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ per ogni x: essendo il numeratore positivo crescente in n, e il denominatore positivo decrescente in n. Inoltre il limite puntuale f è una funzione continua. Per il criterio del Dini su ogni intervallo limitato $[0;a]$, $a \geq 0$, vi è convergenza uniforme.
iii- Per il teorema di B. Levi, essendo la convergenza crescente non negativa
$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}\,dx = \int_0^\infty \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2}$.
iv- La risposta è sì, essendo il limite puntuale infinitesimo a $+\infty$. Infatti, dato $1 > \varepsilon > 0$ per $x^2 \geq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ si ha convergenza uniforme su $\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}; +\infty\right) =:$

$$0 \leq \sup_{x\geq\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}} \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \sup_{x\geq\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}} \frac{1}{1+x^2} \leq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

D'altra parte, per ii- vi è convergenza uniforme in $\left[0; \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}-1}\right]$, quindi esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbf{N}^+$ tale che $0 \leq \sup_{0\leq x\leq\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}} \dfrac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu_\varepsilon$.
Pertanto, si ha che per ogni $\varepsilon \in (0;1)$ vi ν_ε per cui

$$0 \leq \sup_{x\geq 0} \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu_\varepsilon \text{ che è la tesi.}$$

ESERCIZIO 3 **i-** Per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{|t|^a} =: L$? [Ricordare $\sin t = t + o(t^2),\ t \to 0$.]
ii- Per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a} =: L$.
iii- Per quali a la $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0) \\ L, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è differenziabile in $(0,0)$?
iv- La $F(x) =: \displaystyle\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^x \frac{\sin xy}{x^2+y^2}\,dy$ è continua in ogni $x \geq 0$?
v- È derivabile in $x = 0^+$? Nel caso si calcoli la derivata.

Soluzione: **i-** Per $a < 1$ il limite è nullo. Per $a \geq 1$ limite destro e sinistro sono non nulli e di segno opposto, quindi il limite non esiste.
ii- Si argomenta sulla base del precedente risultato.
- - Per $a < 1$: poichè se $r^2 = x^2 + y^2 \to 0$ anche $xy \to 0$ si ha $\dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a} = \dfrac{xy + o(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^a}$, in coordinate polari $\dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^a} = \dfrac{r^2\cos\phi\sin\phi + o(r^4)}{r^{2a}} = r^{2(1-a)}\cos\phi\sin\phi + o(r^{2(2-a)}) \to 0$.
- - Per $a \geq 1$ il limite non esiste per chè i limiti di restrizioni sono diversi . Per $x = y$ la funzione diventa infatti $\dfrac{\sin x^2}{2^a(x^2)^a} \to +\infty$. Per $x = 0$ la funzione è nulla.
iii- Per $a \geq 1$ la funzione non è continua in $(0,0)$. Quindi, poichè la differenziabilità in un punto comporta la continuità nel punto, solo tra gli $a < 1$ si devono isolare quelli per cui la funzione è differenziabile.
- - Per la differenziabilità conviene usare la definizione di differenziabilità e ancora lo sviluppo di Taylor per il seno e le coordinate polari. Si osserva che $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$ e quindi le derivate parziali in $(0,0)$ sono nulle. Quindi se fosse differenziabile dovrebbe esser $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$. Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\phi\sin\phi + o(r^4)}{r^{2a}} = r^{2(1-a)}\cos\phi\sin\phi + o(r^{2(2-a)}),$$

quindi se $r^{2(1-a)} = o(r)$ per $r \to 0^+$ la funzione sarebbe differenziabile con differenziale nullo. Ciò accade se e solo se $2(1-a) > 1$ cioè se $\dfrac{1}{2} > a$.
iv- - - La continuità negli $x_0 > 0$ è dovuta al fatto che $\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$ è uniformemente continua in $\left[\frac{x_0}{2}; \frac{3}{2}x_0\right] \times [0; 2x_0]$.
- - Per la continuità in $x_0 = 0$ si assume che $0 < x \leq 1$. Se $0 < y \leq x \leq 1$ si ha $\left|\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{|x||x|}{x^2} = 1$. Inoltre per $y \neq 0$ si ha $\lim_{x\to 0^+} \chi_{[0;x]}(y)\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} = 0$. Per convergenza dominata sul dominio di integrazione $[0;1]$ si passa al limite sotto segno di integrale.
v- Con il cambiamento di coordinate $z = \dfrac{y}{x}$ si ha

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin xy}{x^2+y^2}\,dy = x\int_0^1 \frac{\sin x^2 z}{x^2(1+z^2)}\,dz = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\sin x^2 z}{1+z^2}\,dz.$$

Per studiare la derivabilità in 0^+ conviene usare la definizione, e vedere se esiste $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{x}$. Ma $\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2 z}{1+z^2}\,dz$. Poichè per convergenza dominata l'integrale è infinitesimo, per il teorema di de l'Hôpital tale limite esiste se esiste quello del rapporto delle derivate ed è ad esso eguale: $\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^1 \frac{2xz\cos zx^2}{1+z^2}dz = \int_0^1 \frac{z\cos zx^2}{1+z^2}dz$ ove si è derivato sotto segno di integrale essendo la derivata dell'integranda dominata per $0 \leq z \leq 1$ e $0 < x \leq 1$ (non restrittivo supporlo poichè $x \to 0^+$). Ancora per convergenza dominata per $x \to 0^+$ si ha

$$\int_0^1 \frac{z\cos zx^2}{1+z^2}dz \to \int_0^1 \frac{z}{1+z^2}dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{2}\log 2.$$

ESERCIZIO 4 **i-** Sia $f(x,y) = \cos(x+y) - \tan(x+y)\sin xy$. Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$.
ii- Si mostri che in un intorno di $P = (1,0,1)$, l'insieme $Z = \{(x,y,x) \in \mathbf{R}^3 : \ e^{x^2y} + yz - x^3 = 0\}$ è il grafico di una $y = g(x,z)$. Si calcoli l'equazione del piano tangente a Z in P.
iii- Sia $F(u,v) = {}^t(u^2 - v, uv, u^2 + v)$. Si determini l'equazione del piano tangente in $F(1,1)$ all'immagine di F ristretta ad un intorno di $F(1,1) = (0,1,2)$.

iv- Sia $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Si mostri che è localmente invertibile in $(0,1)$ e si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(2,0)$.

Soluzione: **i-** Per definizione l'equazione del piano *tangente al grafico* di una funzione f differenziabile, in un proprio punto $(p,q,f(p,q))$ è quella del traslato del *grafico del differenziale*

$$z = f(p,q) + \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)(x-p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)(y-q).$$

Nel caso $(p,q) = (\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$, $f(p,q) = 1$,
$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+y) + \left(1 + (\tan(x+y))^2\right) \sin xy + y \cos xy \tan(x+y)$.
Pertanto $\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = 0$ e per simmetria $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = 0$. L'equazione è quindi $z = 1$.

ii- Il gradiente della funzione G il cui luogo di zeri è Z è $(2xye^{x^2y} - 3x^2, x^2e^{x^2y} + z, y)$ che valutato nel punto $P = (1,0,1) \in Z$ dà $(-3,2,0)$. Per il teorema del Dini, Z in un intorno di P è grafico con variabile dipendente y. L'equazione del piano *tangente al luogo di zeri* di G sarà quindi quella del traslato del *nucleo del differenziale* di G

$$-3(x-1) + 2y = 0.$$

iii- Nelle ipotesi del teorema del rango, l'equazione del piano *tangente all'immagine* di un'opportuna restrizione di F ad un intorno di $(1,1)$ è, in forma parametrica, l'*immagine del differenziale* trasalta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F(1,1) + s\,\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) + t\,\frac{\partial F}{\partial v}(1,1), \qquad s,t \in \mathbf{R},$

Essendo il caso, in quanto $F_u(u,v) = {}^t(2u, v, 2u)$ e $F_v(u,v) = {}^t(-1, u, 1)$, che valutati in $(1,1)$ danno rispettivamente ${}^t(2,1,2)$ e ${}^t(-1,1,1)$, linearmente indipendenti, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ 1 + s + t \\ 2 + 2s + t \end{pmatrix}, \qquad s,t \in \mathbf{R}.$$

Direttamente in forma cartesiana: essendo le derivate parziali indiopendenti l'equazione del piano tangente è

$$\langle ((x,y,z) - F(1,1)) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(1,1) \times \frac{\partial F}{\partial v}(1,1) \rangle = \langle ((x,y,z) - (0,1,2)) \cdot (2,1,2) \times (-1,1,1) \rangle =$$
$$= det \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -x - 4(y-1) + 3(z-2) \quad = \quad 0.$$

iv- Si verificano le ipotesi del teorema di invertibilità locale. L'applicazione Φ è di classe C^1 con $J\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$, quindi $J\Phi(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a -1 e dunque è invertibile. Perciò l'inversa Ψ di una *restrizione* di Φ ad un intorno di $(0,1)$, esiste in un intorno di $\Phi(0,1) = (2,0)$ e si ha $J[\Psi](2,0) = [J\Phi(0,1)]^{-1}$.

Ovvero derivando rispetto ad u l'identità $\begin{cases} e^x + y = u \\ xy = v, \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot e^x + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot 1 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot x = 0, \end{cases}$

e quindi calcolando nel punto $(u,v) = (2,0)$, per cui $(x,y) = (0,1)$ si ricava il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(2,0) + \frac{\partial y}{\partial u}(2,0) = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(2,0) = 0, \end{cases} \quad \text{per cui } \frac{\partial y}{\partial u}(2,0) = 1.$$