CENTRO DELLE VELOCITÀ

Titolo nota 30/10/2012

$\exists!$ punto C_V del piano mobile ($\text{se } \dot\theta \neq 0$)
(punto $\in$ al corpo rigido o a una sua estensione rigida) che è fermo, all'istante t considerato, nel sistema fisso

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AB} \qquad \underline{\omega} = \dot\theta \hat{k} \qquad \underline{v}_{C_V} = \underline{0}$$

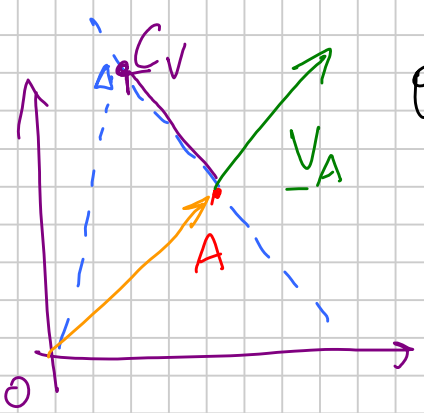
$$0 = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge \underline{AC_V}$$

$$\underline{AC_V} = \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_A}{|\underline{\omega}|^2} = \frac{\dot\theta \hat{k} \wedge \underline{v}_A}{|\underline{\omega}|^2} = \frac{\hat{k} \wedge \underline{v}_A}{\dot\theta}$$

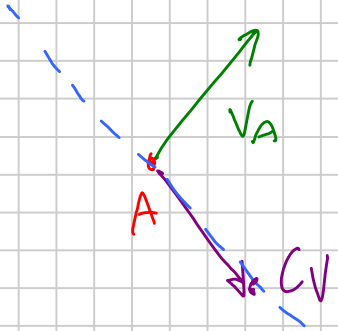
$$\underline{v}_A = \dot x_A \hat{\imath} + \dot y_A \hat{\jmath}$$

$$\underline{AC_V} = \frac{\dot x_A \hat{\jmath} - \dot y_A \hat{\imath}}{\dot\theta} \qquad \underline{OA} = x_A \hat{\imath} + y_A \hat{\jmath}$$

$$\underline{OC_V} = \left(x_A - \frac{\dot y_A}{\dot\theta}\right)\hat{\imath} + \left(y_A + \frac{\dot x_A}{\dot\theta}\right)\hat{\jmath}$$



$\dot\theta > 0$



$\dot\theta < 0$

$$|AC_V| = \frac{|\underline{v}_A|}{|\dot\theta|}$$

Se considero un altro istante di tempo t'
$\exists$ un nuovo centro delle velocità $C_{V'}$
che non è fatto (in generale) dalla stessa porzione
di materia (elementino materiale) di C_V

Per avere un punto che identifica chi è il C_V
in un <u>intervallo</u> I di tempo in cui $\theta \neq 0$
si introduce un punto geometrico sovrapposto
istante per istante al C_V

- Si guadagna una relazione valida $\forall t \in I$
- Perdiamo la condizione di rigidità

Il punto geometrico C sovrapposto istante per istante
al C_V è detto CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

$OC(t)$ rappresenta il moto di un punto geometrico
che non è vincolato rigidamente al corpo

$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \wedge \underline{C_t P}$ NON È LA FORMULA DELLA CIN. RIGIDA

punto geom. punto $\in$ corpo rigido

Se $\theta \neq 0$ l'atto di moto del corpo rigido è
una rotazione intorno ad un asse $\perp$ piano fisso e pas=

sante per il CIR

se $\dot{\theta}=0$ il CV è "all'infinito" e l'atto di moto è traslatorio

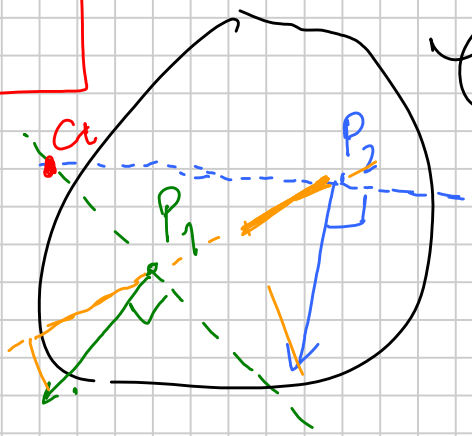
---

Moti rototraslatori in cinematica rigida piana

La velocità di un qualunque punto P del corpo rigido $\mathcal{C}$ è $\perp$ al vettore $C_t P$

Questo vale $\forall P \in \mathcal{C}$

Tutte le perpendicolari ai vettori velocità (a un certo istante t) dei punti $\in \mathcal{C}$ (o a una sua estensione rigida) devono incontrarsi nel punto C_t

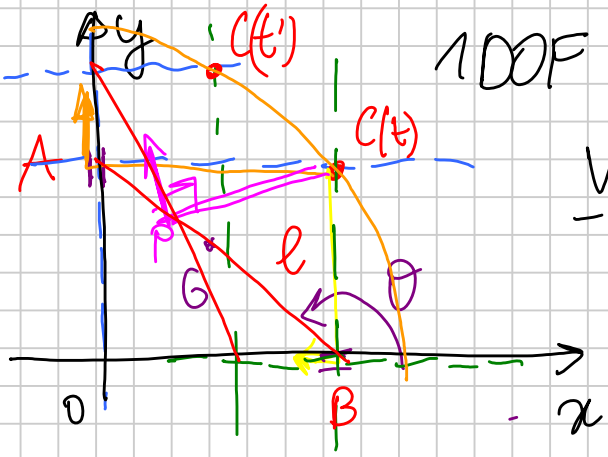


$\mathcal{C}$ La traiettoria di $C(t)$ nel piano fisso è detta polare fissa o base

la traiettoria di $C(t)$ nel piano mobile è detta polare mobile o rulletta

- Nella tecnologia meccanica base e rulletta sono utilizzate per la progettazione di ingranaggi

Durante il moto piano di un corpo rigido è la piana mobile rotola senza strisciare sulla piana fissa

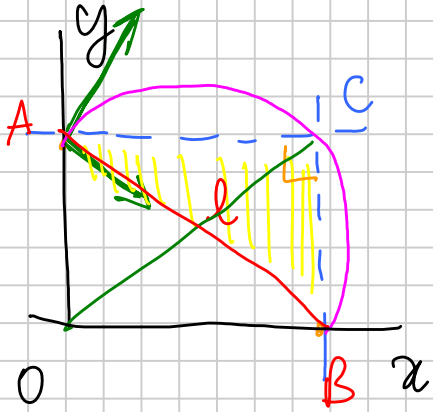


1 DOF

$|C_tP|$ non è costante

$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge C_tP$

Vista formula della cinematica rigida



OBCA è un rettangolo

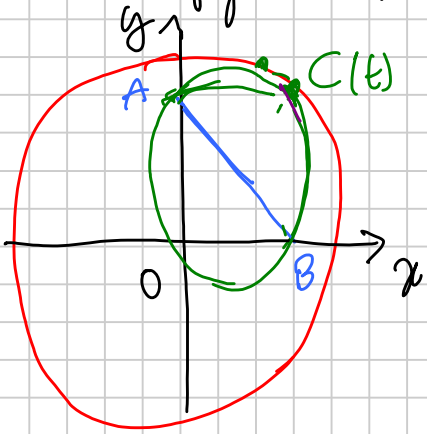
$|AB| = |OC| = l$

C_t ad ogni istante t dista l da O

→ C si muove su una circonferenza di centro O e raggio l

→ Nel sist. di rif. solidale, C_t si muove su una circonferenza che ha per diametro la sbarra AB

la piana mobile è una circonferenza di centro G e raggio l/2



Durante il moto del corpo rigido $\mathcal{C}$, la P.m. rotola senza strisciare (r.s.s.) sulla P.f.

$OC(t)$ $\quad \underline{v}_C(t) = \dfrac{d\overline{OC}}{dt}$ $\quad \underline{v}_C^{(a)} = \underline{v}_C^{(r)} + \underline{v}_C^{(t)}$

$\underline{v}_C^{(a)}$: piano fisso; $\underline{v}_C^{(r)}$: piano mobile; $\underline{v}_C^{(t)}$: ?

$C(t)$ all'istante t è sovrapposto ad un punto C_V di $\mathcal{C}$ che ha velocità nulla

Per def. di velocità di trascinamento $\underline{v}_C^{(t)} = \underline{0}$

$\underline{v}_C^{(a)} = \underline{v}_C^{(r)}$ $\rightarrow$ ad ogni istante di tempo t P.f. e P.m. sono tangenti in C_t

poiché la retta per C_t è diretta come $\underline{v}_C$ è tangente ad entrambe

$$ds^{(f)} = |\underline{V}_C^{(a)}(t)|\,dt$$
$$ds^{(m)} = |\underline{V}_C^{(r)}(t)|\,dt \quad \rightarrow \quad ds^{(f)} = ds^{(m)}$$

PROFILI CONIUGATI

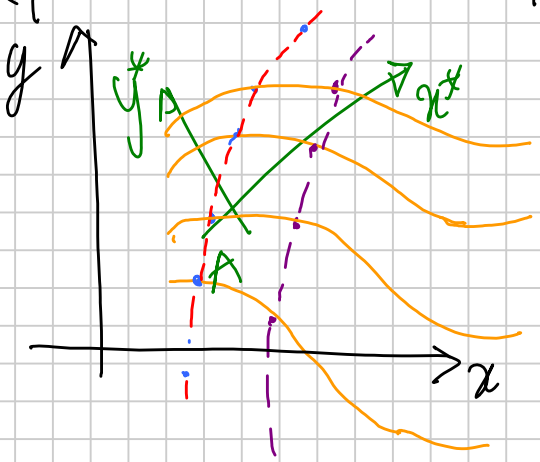
Supponiamo di prendere una curva β fissa sul piano mobile

Durante il moto β genera una famiglia di curve $\mathcal{F}$, ognuna di queste è realizzata da un valore di un parametro s. Questa famiglia di curve, in generale, ammetterà un inviluppo

b è tangente a tutte le curve di $\mathcal{F}$

$$\begin{cases} F(x,y,s)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial s}=0 \end{cases} \longrightarrow g(x,y)=0 \text{ che descrive la curva } b$$

b e β sono detti profili coniugati

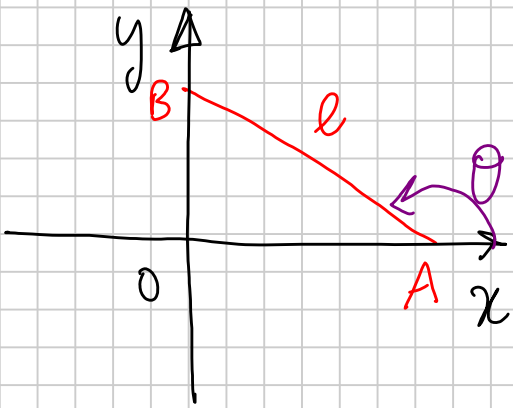


La normale comune a b e β nel punto di contatto B (geometrico) al tempo t passa per il $C(t)$ ottenuto considerando β come un corpo rigido in movimento

In genere β muota e striscia su b perché la velocità di trascinamento di B non è $\underline{0}$

Se $B(t) \equiv C(t)$ allora $\underline{v}_B^{(t)} = \underline{0}$ e non c'è strisciamento, come accade fra p.f. e p.m.

ESEMPIO "SIMILE" AL PRECEDENTE



$A \equiv (-\ell\cos\theta, 0)$

$B \equiv (0, \ell\sin\theta)$

eq. della retta per A e B $= \dfrac{x}{-\ell\cos\theta} + \dfrac{y}{\ell\sin\theta} = 1$

$$\begin{cases} -x\sin\theta + y\cos\theta - \ell\sin\theta\cos\theta = 0 \\ -x\cos\theta - y\sin\theta - \ell\cos^2\theta + \ell\sin^2\theta = 0 \end{cases}$$

fascio di rette per $A(\theta)$ e $B(\theta)$

per ricavare la curva b, posso risolvere per $x(\theta)$ e $y(\theta)$

$$\begin{cases} x\sin\theta - y\cos\theta = -\ell\sin\theta\cos\theta \\ x\cos\theta + y\sin\theta = -\ell(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}$$

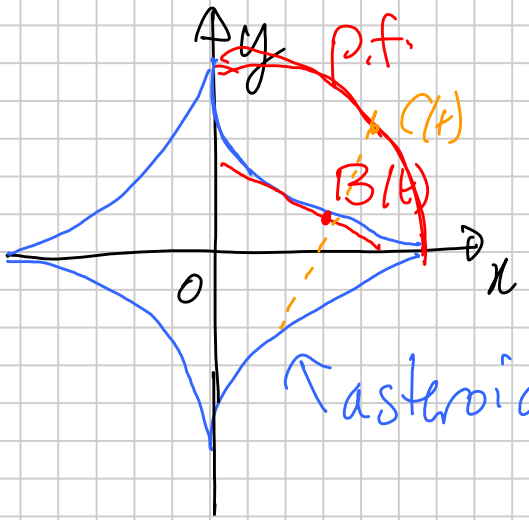
$\Delta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$x = \begin{vmatrix} -\ell\sin\theta\cos\theta & -\cos\theta \\ -\ell(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & +\sin\theta \end{vmatrix} = -\ell\sin^2\theta\cos\theta - \ell\cos^3\theta + \ell\cos\theta\sin^2\theta$$

$x = -\ell\cos^3\theta$

$$y = \begin{vmatrix} \sin\theta & -\ell\sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta & -\ell(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{vmatrix} = \ell\sin^3\theta - \ell\sin\theta\cos^2\theta + \ell\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\begin{cases} x = -\ell \cos^3\theta \\ y = \ell \sin^3\theta \end{cases}$$



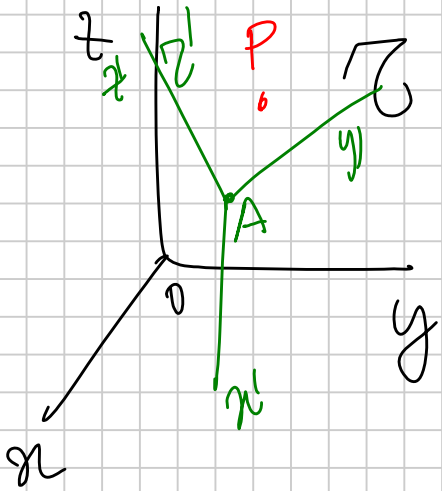
↑ asteroide

$$\cos(\theta) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{1/3}$$

$$\sin\theta = \left(\frac{y}{\ell}\right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{\ell}\right)^{2/3} = 1 \qquad x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$$

DINAMICA E STATICA RELATIVA DEL PUNTO MATERIALE



$\mathcal{T}$ "fisso"

$$\underline{F} = m\,\underline{a}_P^{(a)}$$

$\mathcal{T}'$ "mobile" e non inerziale

$$\underline{a}^{(a)} = \underline{a}^{(r)} + \underline{a}^{(tr)} + \underline{a}^{(co)}$$

$$\underline{F} = m\left(\underline{a}^{(r)} + \underline{a}^{(tr)} + \underline{a}^{(co)}\right)$$

Può essere utile descrivere il moto di P in $\mathcal{T}'$

$$\underline{F} - m\underline{a}^{(tr)} - m\underline{a}^{(co)} = m\underline{a}^{(r)}$$

$\underline{F}^{(t)}$ = $-m\underline{a}^{(tr)}$, $\underline{F}^{(co)}$ = $-m\underline{a}^{(co)}$

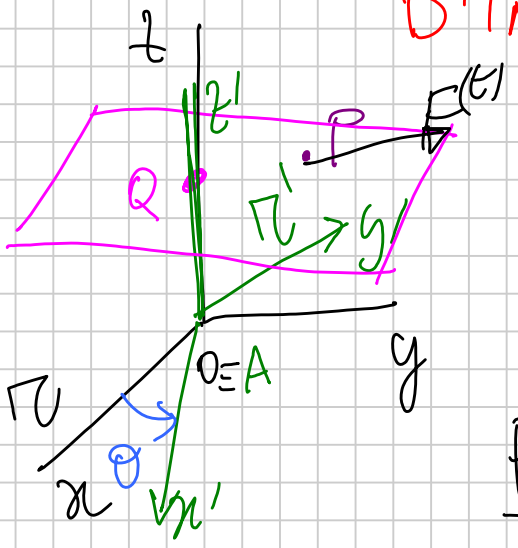
$\underline{a}^{(r)}$ → accelerazione di P misurata da un osservatore solidale a $\mathcal{T}'$

$$\underline{a}^{(r)} = \ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{\jmath}' + \ddot{z}'\hat{k}'$$

$$\overrightarrow{AP} = x'\hat{i}' + y'\hat{i}' + z'\hat{k}'$$

$$m\underline{a}^{(r)} = \underline{F} + \underline{f}^{(t)} + \underline{f}^{(co)}$$

FORZE APPARENTI O FORZE D'INERZIA



$\underline{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} = \dot{\theta}\hat{k}'$ $\quad \dot{\theta} = \text{costante}$

$$\underline{a}_{co} = 2\dot{\theta}\hat{k} \wedge \underline{v}_p^{(r)}$$

$O \equiv A$

$$\underline{f}^{(co)} = -2m\dot{\theta}\hat{k} \wedge \underline{v}_p^{(r)}$$

$$\underline{F}^{(t)} = -m\underline{a}^{(t)} = -(-m\dot{\theta}^2 \overrightarrow{QP}) = m\dot{\theta}^2 \overrightarrow{QP}$$

NEL CASO DELLA STATICA RELATIVA

P è fermo in $\mathcal{O}'$ $\quad \underline{v}_p^{(r)} = \underline{0} \quad \underline{a}_p^{(r)} = \underline{0}$

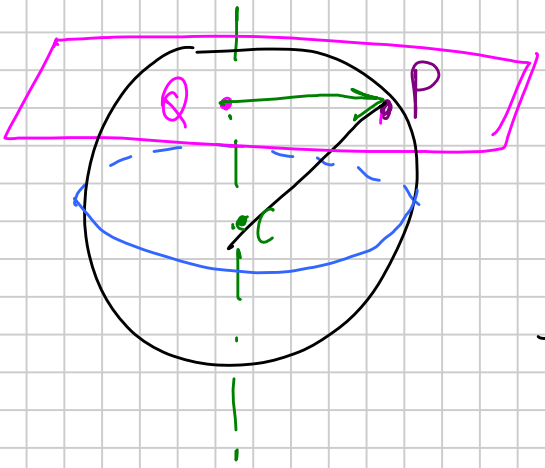
$\underline{0} = \underline{F} + \underline{F}^{(t)}$ non c'è forza di Coriolis

$\underline{F}^{(co)} = \underline{0}$ perché $\underline{v}^{(r)} = \underline{0}$

ESEMPIO DI STATICA

oggetto fermo rispetto a Terra in prossimità della Terra

$\underline{P} = m\underline{g} + \underline{F}^{(t)}$ (g sulla superficie) ← causata dalla rotaz. della Terra intorno al proprio asse con velocità angolare ω



$$\underline{P} = m\underline{g} + m\omega^2 \underline{QP} \qquad \omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{86400 \text{ s}}$$

$$\underline{P} = m(\underline{g} + \omega^2 \underline{QP})$$

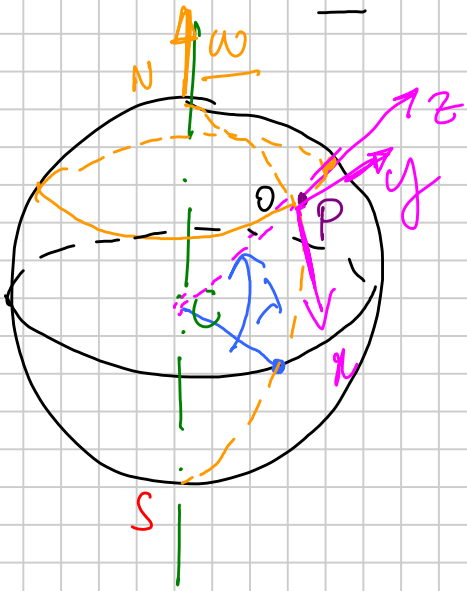
gravità effettiva

$$|\underline{g}| = \frac{M_T \cdot G}{R_T^2} \qquad \underline{g} = \frac{M_T \cdot G}{R_T^3} \cdot \underline{PC}$$

Sembrate tenere fermo il punto materiale P occorre applicare ad esso una forza $\underline{F}$ tale che $\underline{F} + \underline{mg} + m\omega^2 \underline{QP} = \underline{0}$

Cosa succede se P si muove verso la Terra?

$$m\underline{a}^{(r)} = m\underline{g} + m|\underline{\omega}|^2 \underline{QP} - 2m\underline{\omega} \wedge \underline{v}_P^{(r)}$$



asse x tangente al meridiano passante per O

asse y tangente al parallelo passante per O

asse z lungo CP

Origine O $CP \cap$ superficie terrestre

Dovrebbero essere x' y' z' → sono assi mobili

$\underline{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ λ = latitudine di O

$\omega_x = -|\underline{\omega}| \cos\lambda$ $\omega_y = 0$ $\omega_z = |\underline{\omega}| \sin\lambda$

$\underline{v}_P^{(r)} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

$$\underline{\omega} \wedge \underline{v}^{(r)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -|\omega| c & 0 & |\omega| s \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$$

$-|\underline{\omega}| \dot{y} \sin\lambda \, \hat{i} + (|\underline{\omega}| \dot{z} \cos\lambda + |\underline{\omega}| \dot{x} \sin\lambda) \hat{j}$

$- |\underline{\omega}| \dot{y} \cos\lambda \, \hat{k}$ $\underline{g} = -|g| \hat{k}$

$\omega^2 QP = ?$ $|QP| = |CP| \cos\lambda$

$|CP| = R_T + z_P \simeq R_T$

Bisognerebbe scomporre QP lungo gli assi mobili

In realtà non lo faremo perché $|\underline{F}^{(t)}| \propto \omega^2$

$|\underline{F}^{(co)}| \propto \omega$ $|\underline{F}^{(t)}| \ll |\underline{F}^{(co)}|$

$\underline{a}^{(r)} = -|g| \hat{k} - 2 \underline{\omega} \wedge \underline{v}^{(r)}$

$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin\lambda$ $\ddot{y} = -2\omega \dot{z} \cos\lambda - 2\omega \dot{x} \sin\lambda$

$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos\lambda$

$x(0) = y(0) = 0$ $z(0) = h \ll R_T$

$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0)$ l'oggetto parte da fermo ad altezza h da terra

da $\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin\lambda$ ricaviamo

$\dot{x} = 2\omega y \sin\lambda + C_1$ (ω costante, λ costante)

$0 = 2\omega \cdot 0 \cdot \sin\lambda + C_1 \rightarrow C_1 = 0$

$\dot{x} = 2\omega y \sin\lambda$

$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos\lambda$

$\dot{z} = -gt + 2\omega y \cos\lambda + C'$

$\dot{z}(0) = -g \cdot 0 + 2\omega y(0) \cos(\lambda) + C' \rightarrow C' = 0$

$\dot{x} = 2\omega y \sin\lambda$

$\dot{z} = -gt + 2\omega y \cos\lambda$

$\ddot{y} = -2\omega(-gt + 2\omega \dot{y} \cos\lambda)\cos\lambda - 2\omega(2\omega y \sin\lambda)\sin\lambda$

$\ddot{y} = 2\omega g t \cos\lambda - 4\omega^2 y$ trascurabile

$\dot{y} = \omega g t^2 \cos\lambda + C''$

$y = \frac{1}{3}\omega g \cos\lambda t^3 \quad y(t) > 0$

C'è un moto lungo y

$\dot{x} = 2\omega \cdot \frac{1}{3}\omega g \cos\lambda t^3 \sin\lambda$ $\propto \omega^2$ trascurabile

$$\ddot{z} = -gt + 2\omega\left(\frac{1}{3}\omega g \cos\lambda t^3\right)\cos\lambda \quad \propto \omega^2 \text{ trascurabile}$$

$$\dot{z}(t) = -gt \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$y(\bar{t}) = \frac{1}{3}\omega g \cos\lambda \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 \quad \swarrow > 0$$

punto di caduta è spostato verso EST nell'emisfero nord.